Deze maand gaat de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2016 van start met de eerste ronde op alle scholen in het land. Zo'n 200 onderbouwleerlingen die geselecteerd waren via de Kangoeroewedstrijd, hebben in oktober al een voorproefje gehad: toen vond op de Vrije Universiteit Amsterdam de Junior Wiskunde Olympiade plaats. Voor het oplossen van de opgaven was nauwelijks voorkennis nodig, maar wel vaak een creatieve ingeving. Zoals knippen, schuiven en draaien.

■ door Quintijn Puite en Birgit van Dalen

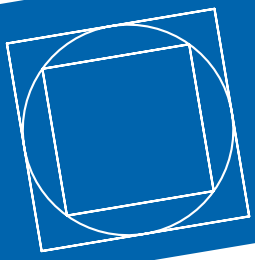
KNIPPEN, SCHUIVEN EN DRAAIEN

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Hieronder zie je twee opgaven uit de Junior Wiskunde Olympiade 2015. Probeer ze eerst eens zelf op te lossen voordat je de bladzijde omslaat. En vraag ook eens aan je wiskundedocent of aan je ouders hoe zij ze zouden oplossen. Wellicht dat zij de opgaven te lijf gaan met de stelling van Pythagoras, met de oppervlakteformule van een cirkel of met het invoeren van letters en het opstellen van een vergelijking. Maakt dat het makkelijker? Oordeel zelf maar, nadat je de uitwerkingen op de volgende pagina bekeken hebt.

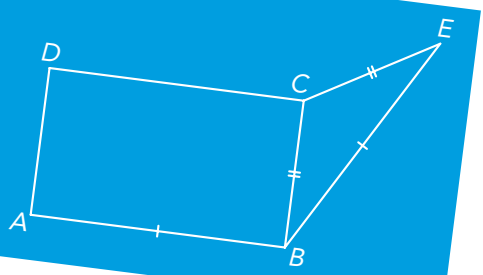
VIERKANT EN CIRKEL

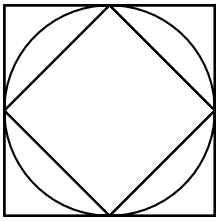
Door de vier hoekpunten van een vierkant met oppervlakte 1 tekenen we een cirkel. Om de cirkel tekenen we weer een vierkant, zodat alle zijden de cirkel raken. Wat is de oppervlakte van dit vierkant?



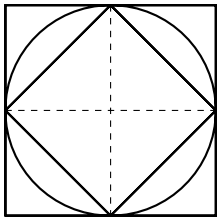
RECHTHOEK EN DRIEHOEK

Gegeven is een rechthoek $ABCD$ en een punt E. Er geldt dat lijnstukken BE en BA even lang zijn en ook dat lijnstukken CE en CB even lang zijn. Verder is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ vier keer zo groot is als de oppervlakte van driehoek BCE. De lengte van de zijde AD is 10. Wat is de lengte van de diagonaal AC?





Figuur 1



Figuur 2

De sleutel van de eerste opgave (vierkant en cirkel) is dat je de vierkanten vrij kunt draaien, zolang de cirkel op z'n plek blijft. Door het draaien verandert er niets aan de grootte en dus ook niets aan de oppervlakte van een vierkant. We kunnen dus het binnenste vierkant draaien tot het met een punt naar boven staat, waarbij het nog steeds oppervlakte 1 heeft (zie figuur 1).

Wellicht zie je de oplossing nu al, op wonderbaarlijke wijze tevoorschijn getoverd door het draaien van het binnenste vierkant. We tekenen in figuur 2 nog even de diagonalen van het kleine vierkant met stippellijntjes. Nu blijkt het grote vierkant opgedeeld te zijn in acht gelijke driehoeken, waarvan het kleine vierkant er precies vier bevat. Dus het grote vierkant is twee keer zo groot als het kleine vierkant en heeft daarom oppervlakte 2.

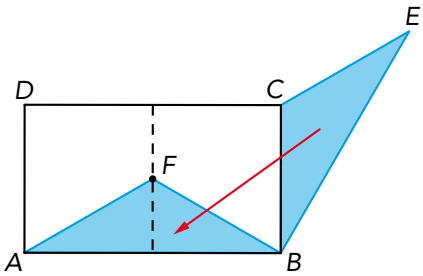
Op naar de tweede opgave (rechthoek en driehoek). Nu gaan we niet draaien, maar schuiven, en wel met driehoek *BCE*. Omdat *BE* en *BA* even lang zijn, past deze driehoek precies op de bodem van de rechthoek, zoals in figuur 3. En omdat *BC* en *CE* even lang zijn, is het een gelijkbenige driehoek met zijn top precies boven het midden van zijde *AB*.

Wat zijn we hiermee opgeschoten? Het is handig dat driehoek *BCE* zich nu verplaatst heeft naar een positie binnen de rechthoek, want dat maakt het makkelijker om iets te doen met een ander gegeven uit de opgave: de oppervlakte van de rechthoek is vier keer zo groot als die van *BCE*. Dus ook de nieuwe driehoek *ABF* heeft een kwart van de oppervlakte van de rechthoek. Hiermee gaan we bepalen waar punt *F* zich precies bevindt. Dit kan door de oppervlakteformule van een driehoek te gebruiken, maar het kan ook zonder. In figuur 4 zie je een rechthoek met zijn diagonalen en met gestippeld ook nog een extra horizontale en verticale lijn door het midden.

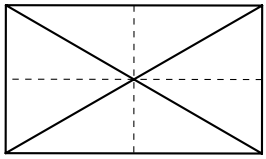
Door de diagonalen en de stippellijnen wordt de rechthoek in acht identieke driehoeken opgedeeld. Twee van zulke driehoeken vormen steeds een gebied begrensd door de diagonalen. Dus elk van de vier stukken die ontstaan door de diagonalen te tekenen, heeft dezelfde oppervlakte, namelijk een kwart van de oppervlakte van de rechthoek. Als we nu terugkijken naar figuur 3, zien we dat *F* dan wel het snijpunt van de diagonalen moet zijn.

Na al dit opknippen en schuiven kunnen we de vraag beantwoorden. De diagonaal *AC* is twee keer zo lang als het lijnstuk *AF*, omdat *F* op de diagonaal ligt, en het lijnstuk *AF* is op zijn beurt even lang als zijde *BC* van de rechthoek. Gegeven is dat *AD* en daarmee ook *BC* lengte 10 heeft, dus $AC = 20$.

EERSTE RONDE Ook de opgaven van de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade in januari zijn vaak zonder moeilijke formules op te lossen. Als je een opgave over de oppervlakte van een figuur tegenkomt, grote kans dat je hem kunt kraken met wat knippen, draaien en schuiven. Wil je meer oefenen hiermee? Bekijk dan het hoofdstuk 'Knippen en plakken' in het boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade* (zie www.wiskundeolympiade.nl). ■



Figuur 3



Figuur 4